

УДК 62-192.003 (045)

С.В. Єгоров, асп.

**ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ СТАТИСТИКИ, ВИКОРИСТОВУВАНОЇ
ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ БЕЗВІДМОВНОСТІ**

Проведено моделювання методом Монте-Карло випадкових вибірок із генеральної сукупності для визначення ймовірності безвідмовної роботи. Проведено аналіз якості статистики вигляду $\vartheta = \frac{r}{N}$.

Modeling by a method of Monte Carlo casual samples from general set is lead with the purpose of definition of probability of non-failure operation. The analysis of quality of statistics of a kind $\vartheta = \frac{r}{N}$ is lead.

Постановка проблеми

Кожне дослідження випадкових явищ, виконане методами теорії надійності, яка опирається на математичний апарат теорії ймовірності і математичну статистику, прямо або побічно опирається на експериментальні дані.

Оперуючи такими поняттями, як події та їх ймовірності, випадкові величини, їх закони розподілу і числові характеристики, теорія надійності дає можливість теоретично визначити ймовірність одних подій, через ймовірність інших, закони розподілу і числові характеристики одних випадкових величин через закони розподілу і числові характеристики інших.

Такі непрямі методи дозволяють значно заощаджувати час і засоби, які витрачаються на експеримент, але аж ніяк не виключають самого експерименту.

Кожне дослідження у сфері випадкових явищ, як би воно не абстрагувалося, корінням своїм завжди сягає в експеримент, дослідні дані, систему спостережень.

Якість оцінної функції

Для оцінювання показників надійності типу ймовірність безвідмовної роботи $R(t)$ використовують статистику:

$$R(t) = 1 - \vartheta;$$

$$\vartheta = \frac{r}{N}, \quad (1)$$

де r – кількість об'єктів, які відмовили за наробіток t з N зразків, поставлених на випробування.

У математичній статистиці якість оцінної функції визначають такими показниками:

- достатність;
- спроможність;
- незміщеність;
- ефективність.

У праці [1] встановлено, що статистика вигляду (1) є достатньою.

Оцінну функцію називають спроможною, якщо зі збільшенням обсягу n вихідних статистичних даних вибіркове середнє $\tilde{\vartheta}$ збігається за ймовірністю до істинного значення ϑ .

Доведемо, що статистика ϑ спроможна.

Запишемо числові характеристики статистики ϑ – середнє вибіркове значення і дисперсію – та з'ясуємо, як вони змінюються зі збільшенням кількості дослідів n .

Позначимо наявні статистичні дані випадкової величини: $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$.

Очевидно, що сукупність цих величин являє собою n незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за таким же законом, що й сама величина ϑ .

Уведемо позначення $M[\vartheta_i]$ для вибіркового середнього величини ϑ і $D[\vartheta_i]$ для вибіркової дисперсії величини ϑ .

У випадках, коли величини $M[\vartheta_i]$ і $D[\vartheta_i]$ входять у формули як певні числа, їх зручніше позначати одною буквою. У цих випадках позначимо вибіркове середнє величини ϑ через m_ϑ , а вибіркиму дисперсію $D[\vartheta_i]$ величини ϑ через D_ϑ .

Вибіркове середнє запишемо так:

$$\tilde{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^n \vartheta_i}{n}.$$

Випадкова величина $\tilde{\vartheta}$ – це функція незалежних випадкових величин $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$. Знайдемо математичне сподівання $m_{\tilde{\vartheta}}$ і дисперсію $D_{\tilde{\vartheta}}$ цієї величини:

$$m_{\tilde{\vartheta}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[\vartheta_i] = \frac{1}{n} n m_\vartheta = m_\vartheta; \quad (2)$$

$$M[\vartheta_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vartheta_i ;$$

$$D_{\vartheta} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[\vartheta_i] = \frac{D_{\vartheta}}{n} ;$$

$$D[\vartheta_i] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - M[\vartheta_i])^2 ,$$

(3)

де m_{ϑ} , D_{ϑ} – числа.

Отже, середнє вибіркє величини $\tilde{\vartheta}$ не залежить від кількості дослідів n і дорівнює середньому вибіркєвому спостережуваній величині ϑ . Щодо дисперсії величини ϑ , то вона необмежено спадає зі збільшенням кількості дослідів і за досить великого n може виявитися як завгодно малою.

Отже, середнє вибіркє – це випадкова величина з як завгодно малою дисперсією.

Спроможність оцінної функції забезпечує зростання якості оцінювання (зниження ймовірності помилок, які виходять за встановлені межі), зі збільшенням обсягу статистики.

Оцінна функція незміщена, якщо середнє вибіркє оцінки ϑ дорівнює істинному значенню ϑ .

Згідно з формулами (2), (3), оцінка $\tilde{\vartheta}$ незміщена. Незміщеність оцінної функції забезпечує брак систематичної помилки у разі багаторазового використання $\tilde{\vartheta}$ замість ϑ .

Оцінна функція ефективна, якщо за фіксованого обсягу статистичних даних оцінка має мінімальну дисперсію серед оцінок, які забезпечуються будь-якими іншими можливими оцінними функціями.

З метою виявлення ефективності оцінної функції було проведено ряд експериментів для різних значень коефіцієнтів варіації v_r та емпіричних ймовірностей появи відмов F .

Крім дисперсій досліджуваної статистики ϑ , були піддані оцінюванню дисперсії оцінних функцій (ймовірностей відмов) на основі ряду теоретичних розподілів [1-5]:

– емпірична дисперсія статистики (1):

$$D_{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \tilde{\vartheta})^2}{n} ;$$

– дисперсія дифузійного немонотонного розподілу DN:

$$D(\vartheta) = D_{\vartheta} ;$$

– дифузійний монотонний розподіл DM:

$$D(\vartheta) = D \left(1 + \frac{5\tilde{v}^2}{4} \right) ;$$

$$D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - S)^2 ;$$

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vartheta_i ;$$

$$\tilde{v} = \left(\frac{2(\sqrt{S^2 + 3D} - S)}{4S - \sqrt{S^2 + 3D}} \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

де D – вибіркєва дисперсія;

S – вибіркєве середнє;

\tilde{v} – коефіцієнт варіації;

– дисперсія нормального розподілу N :

$$D(\vartheta) = \tilde{\sigma}^2 ;$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \hat{\mu})^2} \sqrt{\frac{n-1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}} ,$$

де $\tilde{\sigma}$ – середньоквадратичне відхилення;

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція;

– дисперсія експонентного розподілу EXP:

$$D(\vartheta) = \frac{1}{\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n \vartheta_i} \right)^2} ;$$

– дисперсія логарифмічно нормального розподілу LN:

$$D(\vartheta) = (e^{\tilde{\sigma}^2} - 1) e^{2\mu + \tilde{\sigma}^2} ;$$

$$\tilde{\sigma} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln \vartheta_i - \hat{\mu})^2 \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\vartheta_i) ,$$

де $\hat{\mu}$ – параметр масштабу;

– дисперсія розподілу Вейбулла:

$$D(\vartheta) = \hat{a}^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{b}}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{b}}\right) \right)^2 \right) ,$$

де параметри \hat{a} й \hat{b} визначають, розв'язуючи таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\left(\frac{n}{\hat{b}} \right) + \sum_{i=1}^n \ln \vartheta_i \right) \sum_{i=1}^n \vartheta_i^{\hat{b}} - n \sum_{i=1}^n \vartheta_i^{\hat{b}} \ln \vartheta_i = 0 ; \\ n \hat{a}^{\hat{b}} - \sum_{i=1}^n \vartheta_i^{\hat{b}} = 0 . \end{cases}$$

Результати експериментів і оцінки дисперсій, досліджуваної статистики з використанням ряду теоретичних функцій наведено в таблиці.

Значення дисперсій для законів розподілів випадкової величини

F	v_r	D_g	DN	N	DM	W	LN	EXP
0,1	0,18	1,0078E-3	1,0078E-3	1,0232E-3	1,13E-3	2,159E-3	2,16E-3	9,92E-3
0,1	0,22	1,1053E-3	1,1053E-3	1,1222E-3	1,23E-3	2,338E-3	1,36E-3	0,01129
0,1	0,57	7,132E-4	7,132E-4	7,2409E-4	8,49E-4	1,484E-3	1,11E-3	4,543E-
0,15	0,15	1,29299E-3	1,293E-3	1,3127E-3	1,39E-3	3,265E-3	1,56E-3	0,02099
0,15	0,18	1,40475E-3	1,4048E-3	1,4261E-3	1,49E-3	3,676E-3	1,65E-3	0,02640
0,15	0,47	1,00784E-3	1,0078E-3	1,0232E-3	1,13E-3	2,159E-3	1,23E-3	9,92E-3
0,2	0,13	1,61216E-3	1,6122E-3	1,5756E-3	1,69E-3	4,423E-3	1,76E-3	0,03888
0,2	0,16	1,813E-3	1,813E-3	1,8406E-3	1,89E-3	4,827E-3	1,99E-3	0,04708
0,2	0,41	1,27144E-3	1,27144E-3	1,29079E-3	1,38E-3	3,959E-3	1,57E-3	0,01732

Аналіз даних таблиці показує, що емпіричне значення дисперсії D_g , статистики вигляду (1) і дисперсія розподілу DN збігаються і мають найменше значення серед розподілів, наведених у таблиці.

Висновки

Результати аналізу якості статистики вигляду $\vartheta = r/N$ показали, що ця статистика є достатньою, спроможною, незміщеною і ефективною.

Література

1. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. –

К.: МПБП «Крамар», 2003. – 244 с.

1. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.

2. ГОСТ 27.005-97. Надёжность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Введ. 01.01.99. – 43 с.

3. РД 50-690-89 Методические указания. Надёжность в технике. Методы оценки показателей надёжности по экспериментальным данным. – Введ. 01.01.91. – 131 с.

4. ДСТУ 3004 Надёжность в технике. Методы оценки показателей надёжности по экспериментальным данным. – Введ. 01.01.97. – 123 с

Стаття надійшла до редакції 12.11.07.